

# Сукцесивна улагања — улози

III таблице • Декурзивни и антиципативни улози

---

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 8 и 9

[andrej.seva@ef.unibl.org](mailto:andrej.seva@ef.unibl.org)

Консултације: уторком и четвртком 10–12h (кабинет 401) уз претходну најаву

За једнака сукцесивна улагања, распоређена у унапријед дефинисаним једнаким временским интервалима (серија улога)

3 варијанте:

1. Период капиталисања = Период улагања
2. Период улагања < Период капиталисања (чешће улагање од капиталисања)
3. Период улагања > Период капиталисања (чешће капиталисање од улагања)

Двије врсте улога:

- **Декурзивни улози** — уплата на крају периода
- **Антиципативни улози** — уплата на почетку периода

Период капиталисања =  
Период улагања

Период капиталисања = Период улагања



Формула за антиципативне улоге:

$$K_n = U \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = U \cdot III_p^n$$

гдје је  $r = 1 + \frac{p}{100}$  (каматни фактор)

Период капиталисања = Период улагања



Формула за декурзивне улоге:

$$K_n = U \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = U \cdot (1 + III_p^{n-1})$$

гдје је  $r = 1 + \frac{p}{100}$  (каматни фактор)

## Примјери — Период капиталисања = Период улагања

1. Улагано је у току 8 година сваког полугодишта по 4.000 н.ј. уз каматну стопу од 5% и полугодишње капиталисање. Колика је вриједност свих улога 2 године након посљедњег улагања, ако се ради о: а) антиципативним, б) декурзивним улозима?
2. Улагано је у току 10 година на крају сваког тромјесечја уз каматну стопу од 12% и тромјесечни обрачун камате. У току прве 4 године улози износе по ... н.ј, у току наредне 3 године по 54.000 н.ј, а у току посљедње 3 године по ... н.ј. Колико износи коначна вриједност свих улога 3 године и 2 мјесеца након посљедњег улагања, ако је улог прве серије за 20% већи од улога друге серије, а улог треће серије за 40% мањи од улога прве серије?
3. Предузеће је у току 12 година издвајало на посебан рачун на сљедећи начин: у току прве 3 године на почетку сваког полугодишта по ... н.ј, у току наредних 5 година на крају сваког полугодишта по ... н.ј. и у току посљедње 4 године на крају сваког полугодишта по ... н.ј. По истеку 2 године од дана посљедњег улагања предузеће је остварило на име укупне камате 10.520,41 н.ј. Израчунати износе улога сваке серије, као и укупну вриједност којом предузеће располаже двије године након посљедњег улагања, ако су улози друге серије већи од улога прве серије за 240%, а улози треће серије мањи од улога друге серије за 60% и ако је камата рачуната по стопи од 12% уз шестомјесечно капиталисање.

## Примјер 1 — Антиципативни улози

**Дато:**  $U = 4.000$ ,  $i = 0,05$ ,  $i_r = \frac{0,05}{2} = 0,025$ ,  $m = n$  (период кап. = период улагања)

Број полугодишта улагања:  $8 \cdot 2 = 16$

Број полугодишта до  $K_n$ :  $16 + 3 = 19$  (2 године након посљедњег улагања, 3 периода пролонгирамо јер имамо 1 период у резерви прије краја серије, јер су улози антиципативни)

**Рјешење:**

$$K_{20} = 4.000 \cdot III_{2,5}^{16} \cdot I_{2,5}^3$$

**Објашњење:**

- $III_{2,5}^{16}$  — пролонгација свих улога на крај периода улагања (III таблице)
- $I_{2,5}^4$  — пролонгација акумулираног износа на тражени период (I таблице, нема више улога)

Дато:  $U = 4.000$ ,  $i = 0,05$ ,  $i_r = 0,025$

Рјешење:

$$K_{20} = 4.000 \cdot (1 + III_{2,5}^{16-1}) \cdot I_{2,5}^4$$

Разлика од антиципативних:

- Код декурзивних улога, посљедњи улог у серији **не носи камату** (уплаћен на крају периода)
- Зато користимо  $(1 + III_p^{n-1})$  умјесто  $III_p^n$

## Примјер 2 — Више серија улога

Дато:  $U = 1,2U'$ ,  $U'' = 0,6U$ ,  $U' = 54.000$ ,  $i = 0,12$ ,  $i_r = 0,03$

Рјешење:

$$K_n = \left[ U \left( 1 + III_3^{16-1} \right) I_3^{36} + U' \left( 1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{24} + U'' \left( 1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{12} \right] \cdot I_3^{2/3}$$

или

$$K_n = \left[ U \left( 1 + III_3^{16-1} \right) I_3^{36} + U' \left( 1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{24} + U'' \left( 1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{12} \right] \cdot \left( 1 + \frac{2}{12} \cdot 0,12 \right)$$

Објашњење пролонгације:

- 3 године и 2 мјесеца = 12 тромјесечја + 2 мјесеца =  $12\frac{2}{3}$  тромјесечја
- Свака серија се пролонгира до краја своје серије, затим до краја укупног периода улагања, па на тражени период

Период улагања < Период  
капиталисања

**Период улагања < Период капиталисања — Антиципативно**

Када се улаже чешће него што се капиталише, унутар једног периода капиталисања користи се **прост каматни рачун**.

**Формула:**

$$K_{mn} = U \cdot \left( m + \frac{(m+1)p}{200} \right) \cdot (III_p^{n-1} + 1)$$

гдје је:

- $m$  — број улога унутар једног периода капиталисања
- $n$  — број периода капиталисања
- $p$  — каматна стопа за период капиталисања

Период улагања < Период капиталисања — Декурзивно

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \left( m + \frac{(m-1)p}{200} \right) \cdot (III_p^{n-1} + 1)$$

Разлика од антиципативног:

- $(m + 1)$  постаје  $(m - 1)$  у бројиоцу
- Разлог: код декурзивних улога, први улог унутар периода носи мање камате

**Период улагања < Период капиталисања**

Алтернативни приступ: сви улози унутар једног периода капиталисања се свODE на **један еквивалентни улог** ( $U_e$ ) на почетку периода.

**Формула:**

$$K_{mn} = U \cdot \frac{r_c(r^n - 1)}{r_c - 1}$$

гдје је  $r_c$  конформни каматни фактор.

Период улагања < Период капиталисања

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \frac{r^n - 1}{r_c - 1}$$

гдје је  $r_c$  конформни каматни фактор.

Период улагања > Период  
капиталисања

## Период улагања > Период капиталисања — Антиципативно

Када се капиталише чешће него што се улаже, сваки улог се пролонгира појединачно користећи сложени каматни рачун.

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{r^m(r^{mn} - 1)}{r^m - 1} = U \cdot \left( \frac{III_p^{mn}}{III_p^m} - 1 \right)$$

гдје је:

- $m$  — број периода капиталисања унутар једног периода улагања
- $n$  — укупан број улога

Период улагања > Период капиталисања — Декурзивно

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{r^{mn} - 1}{r^m - 1} = U \cdot \left( \frac{III_p^{mn}}{III_p^m} \right)$$

4. Улагано је у току 7 година уз 4% и тромјесечно капиталисање. У току прве двије године улагано је на крају сваког полугодишта по ... н.ј; у току наредне 4 године на крају сваке године по ... н.ј, посљедњи улог уложен је на крају седме године и износи ... н.ј. Израчунати износе улога сваке серије и стање на рачуну 2 године након посљедњег улагања, ако је улог прве серије мањи од улога треће серије за 40%, а улог друге већи од улога треће серије за 35% и ако је камата за посљедње двије године износила 894,16 н.ј.
5. Улагано је у току 6 година сваког полугодишта по 20.000 н.ј. уз каматну стопу 7% и полугодишње капиталисање. Колико износи вриједност свих улога: а) једно полугодиште након посљедње уплате и б) у тренутку посљедње уплате?
6. Коначна вриједност 16 тромјесечних антиципативних улога по 4.000 н.ј. износи 106.571,08 н.ј. Колико је времена протекло од завршетка серије до дана реализације ових улога ако је каматна стопа за прве 3 године износила 9%, а надаље 12% уз полугодишње капиталисање?

## Примјер 4 — Рјешење

Дато:  $i = 0,04$ ,  $i_r = 0,01$ ,  $U = 0,6U''$ ,  $U' = 1,35U''$ ,  $\sum I = 894,16$

Комбинација:

- 1. серија: период улагања (полугодиште)  $>$  период капиталисања (tromјесечје)
- 2. серија: период улагања (година)  $>$  период капиталисања (tromјесечје)

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{1,01^{4 \cdot 2} - 1}{1,01^2 - 1} \cdot I_1^{28} + U' \cdot \frac{1,01^{4 \cdot 4} - 1}{1,01^4 - 1} \cdot I_1^{12} + U'' \cdot I_1^8$$

За камату посљедње 2 године:

$$\sum_{t=8}^9 I = K_n - \left[ U \cdot \frac{1,01^8 - 1}{1,01^2 - 1} \cdot I_1^{20} + U' \cdot \frac{1,01^{16} - 1}{1,01^4 - 1} \cdot I_1^4 + U'' \right]$$

**Дато:**  $U = 20.000$ ,  $i = 0,07$ ,  $i_r = 0,035$ , 6 година  $\times 2 = 12$  полугодишта

**а) Једно полугодиште након посљедње уплате:**

$$K_n = U \cdot III_{3,5}^{12}$$

**б) У тренутку посљедње уплате (са посљедњом уплатом):**

$$K_n = U \cdot III_{3,5}^{11} + U = U \cdot (III_{3,5}^{12-1} + 1)$$

*Напомена: Ово је декурзивни случај — посљедњи улог не носи камату.*

**Дато:**  $K_n = 106.571,08$ ,  $U = 4.000$ , 16 тромјесечних улога,  $p_1 = 9\%$ ,  $p_2 = 12\%$

Период улагања (тромјесечје) < Период капиталисања (полугодиште)

**Формула:**

$$K_n = \left[ U \cdot \left( m + \frac{(m+1)p_1}{200} \right) \cdot \frac{r_1^6 - 1}{r_1 - 1} \cdot I_{p_2}^2 + U \cdot \left( m + \frac{(m+1)p_2}{200} \right) \cdot \frac{r_2^2 - 1}{r_2 - 1} \right] \cdot I_{p_2}^n$$

**Уврштавање:**

$$106.571,08 = \left[ 4.000 \cdot \left( 2 + \frac{3 \cdot 4,5}{200} \right) \cdot \frac{(1,045)^6 - 1}{0,045} \cdot (1,06)^2 + 4.000 \cdot \left( 2 + \frac{3 \cdot 6}{200} \right) \cdot \frac{(1,06)^2 - 1}{0,06} \right] \cdot (1,06)^n$$

$\Rightarrow n = 5 \rightarrow$  Протекло је 5 семестара (2,5 године)

**7.** Улагано је у току 9 година на сљедећи начин: у току прве 4 године улагано је на почетку сваке године по 4.000 н.ј; у току наредне 3 године улагано је на крају сваког двомјесечја по ... н.ј; у току посљедње 2 године на крају сваке године по ... н.ј. Израчунати вриједност свих улога 3 године и 4 мјесеца након посљедње уплате, ако је каматна стопа 6% р.а. (d) и ако је улог друге серије већи од улога прве за 15%, а улог треће серије већи од улога друге серије за 150%. Поставити модел, дефинисати све елементе модела и скицирати временску линију.

**8.** Улагано је на сљедећи начин уз каматну стопу од 4% р.а. (d) и полугодишње капиталисање. Прве три године, почетком сваког тромјесечја, улагано је по 200 н.ј. Наредне четири године, на почетку сваког полугодишта, по ... н.ј. Посљедња, полугодишња, серија улога, која је трајала четири године, почела је са реализацијом три године након посљедње уплате из друге серије и декурзивна је. Које је стање на рачуну двије године и три мјесеца након посљедње уплате, ако је улог друге серије 80% улога прве серије и ако је улог треће серије већи за 120% улога друге серије, те ако је каматна стопа повећана за 1,5 процентних поена на годишњем нивоу на почетку пете године (у односу на цијели посматрани период улагања)?

**9.** Улагано је у току осам година на сљедећи начин: у току прве двије године по ... н.ј. на почетку сваке године, наредне три године на крају сваког тромјесечја по ... н.ј. и у току посљедње три године на крају сваког полугодишта по 1.200 н.ј. Каматна стопа за прве четири године је 6%, а надаље 8% уз полугодишње капиталисање. Колика је вриједност свих улога двије године и три мјесеца након посљедње уплате, ако је улог прве серије већи од улога треће серије за 20%, а обрачуната камата за трећу годину улагања износи 1.210,73 н.ј?

**10.** Улагано је у S&P 500 ETF по 200 н.ј. на почетку сваког полугодишта 25 година, а након тога 300 н.ј. на крају сваког полугодишта 15 година. Реална стопа приноса на S&P 500 је у првих 18 година и 6 мјесеци износила 12,4%, а надаље 7,8% годишње просјечно. Новац није подигнут ниједном у току периода улагања. Са којим износом ће се располагати након 50 година? Камата се обрачунава полугодишње.

Дато:  $U = 200$ ,  $U' = 300$ ,  $p_{1r} = 6,2\%$ ,  $p_{2r} = 3,9\%$

Рјешење:

$$K_n = 200 \cdot III_{6,2}^{37} \cdot I_{3,9}^{63} + 200 \cdot III_{3,9}^{13} \cdot I_{3,9}^{50} + 300 \cdot \left(1 + III_{3,9}^{30-1}\right) \cdot I_{3,9}^{20}$$

$$K_{100} = 373.990,16 \text{ (50 година)}$$

# Рачун варијабилних улога

**Период улагања = Период капиталисања**

Улози се мијењају за константан износ  $d$  сваки период:  $U_2 = U_1 + d$ ,  $U_3 = U_1 + 2d$ , ...

**Антиципативно:**

$$K_n = U_1 \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} \pm \frac{100d}{p} \cdot \left[ \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} - nr \right]$$

**Декурзивно:**

$$K_n = U_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \pm \frac{100d}{p} \cdot \left[ \frac{r^n - 1}{r - 1} - n \right]$$

*+ ако се улози повећавају, – ако се смањују*

**Период улагања = Период капиталисања**

Улози се мијењају за константан проценат  $q$  сваки период:  $U_2 = U_1 \cdot q$ ,  $U_3 = U_1 \cdot q^2$ , ...

**Антиципативно:**

$$K_n = U_1 \cdot \frac{r(r^n - q^n)}{r - q}$$

**Декурзивно:**

$$K_n = U_1 \cdot \frac{r^n - q^n}{r - q}$$

гдје је  $q$  коефицијент геометријске прогресије (нпр.  $q = 0,997$  ако се улог смањује за 0,3%)

**11.** У току 12 година на крају сваке године улагани су износи који се константно повећавају за 1.000 н.ј. Колико износи вриједност свих улога 2 године и 2 мјесеца након посљедњег улагања ако је први улог 12.000 н.ј. и ако је: а) каматна стопа за првих 5 година 7%, а надаље 8%; б) каматна стопа за првих 5 година и 7 мјесеци 6%, а надаље 7%?

**12.** Улагано је у току 10 година: у току прве 3 године на крају сваког мјесеца по ... н.ј; у току наредне 3 године на крају сваке године по ... н.ј; у току посљедње 4 године на крају сваког полугодишта улагани су износи који се константно смањују за 0,3%. Каматна стопа је 5% уз полугодишње капиталисање. Израчунати вриједност свих улога 2 године и 2 мјесеца након посљедњег улагања, ако је камата у току осме године улагања већа за 3.541,23 н.ј. у односу на камату у току пете године улагања и ако је улог прве серије већи од првог улога треће серије за 20%, а трећи улог треће серије мањи од улога друге серије за 10%?

## Примјер 11 — Рјешење (аритметичка прогресија)

**Дато:**  $U_1 = 12.000$ ,  $d = 1.000$ , а)  $i_1 = 0,07$  (5 год.),  $i_2 = 0,08$  (надаље)

$$U_6 = 12.000 + 5 \cdot 1.000 = 17.000$$

**Рјешење а):**

$$K_n = \left[ 12.000 \cdot \frac{(1,07)^5 - 1}{0,07} + \frac{100 \cdot 1.000}{7} \cdot \left( \frac{(1,07)^5 - 1}{0,07} - 5 \right) \right] \cdot l_8^9 \cdot l_8^{1/6} \\ + \left[ 17.000 \cdot \frac{(1,08)^7 - 1}{0,08} + \frac{100 \cdot 1.000}{8} \cdot \left( \frac{(1,08)^7 - 1}{0,08} - 7 \right) \right] \cdot l_8^2 \cdot l_8^{1/6}$$

## Примјер 13

**Задатак:** Колика је била годишња каматна стопа на штедњу ако је улагано на крају периода и то 4 године по 100 н.ј. мјесечно уз двомјесечно капиталисање, те ако је износ који је подигнут након 9 година и 2 мјесеца од посљедње уплате износио 11.000,64 н.ј.?

Ако су укупни трошкови које је финансијска институција зарачунала износили кумулативно 421,20 н.ј. за посматрани период до терминације штедње, колика је била годишња каматна стопа?

**Рјешење:**

Са каматом и трошковима  $K_n = 11.000,64$

Са каматом без трошкова  $K_n = 11.000,64 - 421,20 = 10.579,44$

$$10.579,44 = 100 \cdot \left( 2 + \frac{(2-1) \cdot \frac{p}{6}}{200} \right) \cdot \left( \left( \frac{100}{p/6} \right)^{24-1} + 1 \right) \cdot \frac{100}{p/6}$$

Хвала на пажњи!

Питања?