Сукцесивне исплате — ренте

IV таблице • Декурзивне и антиципативне исплате • Вјечите ренте

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 10 и 11

andrej.seva@ef.unibl.org

Консултације: уторком и четвртком 10–12h (кабинет 401) уз претходну најаву

Употреба IV финансијских таблица

Једнаке сукцесивне исплате, углавном распоређене у унапријед дефинисаним једнаким временским интервалима

3 варијанте:

1. Период капиталисања = Период исплата
2. Период исплата < Период капиталисања (чешће исплате од капиталисања)
3. Период исплата > Период капиталисања (чешће капиталисање од исплата)

\+ Вјечите ренте

Двије врсте исплата:

- Декурзивне — исплата на крају периода
- Антиципативне — исплата на почетку периода

Период капиталисања = Период исплата

Декурзивне исплате

Период капиталисања = Период исплата

Формуле:

$$K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = R \cdot IV_p^n$$

гдје је $r = 1 + \frac{p}{100}$ (каматни фактор), $v = \frac{1}{r}$ (дисконтни фактор)

Декурзивне исплате — извођење обрасца

$$K = R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + R \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots + R \cdot \frac{1}{r^n} = R \cdot (v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n)$$

Издвојимо суму геометријског низа $S = v + v^2 + \ldots + v^n$:

$$\begin{aligned} S \cdot v &= v^2 + v^3 + \ldots + v^{n+1} \\ S - S \cdot v &= v - v^{n+1} \\ S(1 - v) &= v(1 - v^n) \end{aligned}$$

$$S = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{\frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

Вратимо у првобитни образац:

$$\boxed{K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)} = R \cdot IV_p^n}$$

Антиципативне исплате

Период капитализсања = Период исплата

Формуле:

$$K = R \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r^n(r-1)} = R \cdot (1 + IV_p^{n-1})$$

Примјери — Период капиталисања = Период исплата

1. Полугодишња рента од 3.000 н.ј. прима се 4 године. Примање ренте почиње 6 мјесеци послије уплате. Камата се обрачунава полугодишње на основу годишње каматне стопе 8% (d). Колика је уплата?

2. Колико би новчаних јединица требало издвојити у неки фонд за помоћ радницима за коришћење плаћеног одсуства у току 6 година, уз годишње укамаћење по стопи 7% (d), ако би годишња помоћ била 5.000 н.ј. и ако би исплата почела одмах?

3. Колико би новчаних јединица требало уплатити за 6 годишњих исплата по 4.200 н.ј. ако би се прва сума примила 4 године након уплате и ако се камата обрачунава годишње по стопи 5% (d)? Претпоставити да су исплате: а) декурзивне и б) антиципативне.

4. Уговором о стипендирању, фонд се обавезао да ће стипендисти исплаћивати мјесечно, и то у току 4 године по 200 н.ј. Поред тога, фонд ће исплатити на име награде 1.000 н.ј. ако стипендиста заврши студије за 4 године. Исплата треба да почне: а) један мјесец од дана потписивања уговора и б) на дан потписивања уговора. Годишња каматна стопа, уз мјесечни обрачун, 12%.

Примјер 1 — Рјешење

Дато: $R = 3.000$, $n = 4$ год. $\times 2 = 8$ полугодишта, $i = 0{,}08$, $i_r = 0{,}04$

Декурзивне исплате (прва исплата 6 мјесеци послије уплате):

Рјешење:

$$U = 3.000 \cdot IV_4^8$$

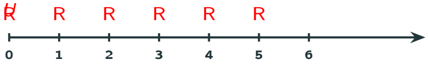
Објашњење:

- IV_4^8 — дисконтовање свих рента на тренутак уплате (IV таблице)
- Период капиталисања $=$ Период исплата $=$ полугодиште
- $p/m = 8/2 = 4$

Примјер 2 — Рјешење (антиципативно)

Дато: $R = 5.000$, $n = 6$ година, $i = 0{,}07$

Исплата почиње одмах $\Rightarrow$ антиципативне ренте



Рјешење:

$$U = R \cdot (1 + IV_7^{6-1}) = 5.000 \cdot (1 + IV_7^5)$$

Формула за антиципативне ренте: $K = R \cdot (1 + IV_p^{n-1})$

Примјер 3 — Рјешење (одгођена рента)

Дато: $R = 4.200$, 6 годишњих исплата, прва исплата 4 године након уплате, $i = 0{,}05$

а) Декурзивне:

$$U = 4.200 \cdot IV_5^6 \cdot II_5^3$$

б) Антиципативне:

$$U = 4.200 \cdot (1 + IV_5^{6-1}) \cdot II_5^4$$

Објашњење:

- IV_5^6 дисконтује ренте на почетак серије исплата
- II_5^3 (односно II_5^4) дисконтује ту вриједност назад на тренутак уплате

Примјер 4 — Рјешење (стипендирање)

Дато: $R = 200$, $R' = 1.000$, $n = 4$ године $\times 12 = 48$ мјесеци, $i = 0{,}12$, $i_r = 0{,}01$

а) Декурзивно (исплата почиње 1 мјесец од потписивања):

$$U = 200 \cdot IV_1^{48} + 1.000 \cdot II_1^{48}$$

б) Антиципативно (исплата почиње на дан потписивања):

$$U = 200 \cdot (1 + IV_1^{47}) + 1.000 \cdot II_1^{48}$$

Објашњење:

- Награда од 1.000 н.ј. се исплаћује на крају 48. мјесеца — увијек се дисконтује са II_1^{48}
- Разлика је само у формули за мјесечне ренте

Период исплата $<$ Период капитализсања

Декурзивне исплате — чешће исплате од капиталисања

Период исплата $<$ Период капиталисања

Метод конформне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r_c^{mn} - 1}{r^{mn}(r_c - 1)}$$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p(m-1)}{200}\right] \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

гдје је:

- m — број исплата унутар једног периода капиталисања
- n — број периода капиталисања
- r_c — конформни каматни фактор

Период исплата $<$ Период капиталисања

Метод конформне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r_c \cdot (r_c^{mn} - 1)}{r^{mn}(r_c - 1)}$$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p(m+1)}{200}\right] \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

Разлика од декурзивног:

- $(m-1)$ постаје $(m+1)$ у бројиоцу

Период исплата $>$ Период капиталисања

Декурзивне исплате — чешће капиталисање од исплата

Период исплата $>$ Период капиталисања

Метод дисконтовања сваке ренте појединачно / ефективне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r^m - 1)}$$

гдје је:

- m — број периода капиталисања унутар једног периода исплата
- n — укупан број исплата (рента)

Антиципативне исплате — чешће капиталисање од исплата

Период исплата $>$ Период капиталисања

$$K = R \cdot \frac{r^m \cdot (r^{mn} - 1)}{r^{mn}(r^m - 1)}$$

Примјери — Различити периоди

5. Колико особа А треба да уплати данас да би осигурала себи једнаку кварталну постнумерандо ренту која ће се исплаћивати 3 године и након тога једнаку декурзивну полугодишњу ренту још 4 године. Рента прве серије је већа од ренте друге серије за 10%, односно за 140 н.ј. Обрачун камате је полугодишњи по каматној стопи од 12% p.a. (d), а прва рента друге серије се исплаћује 6 мјесеци након посљедње ренте прве серије.

6. Рента је исплаћивана у току 10 година на сљедећи начин: прве 3 године на крају сваког тромјесечја по ... н.ј, у току наредне 4 на крају сваког полугодишта, а посљедња рента у износу од 6.000 н.ј. је исплаћена на крају 10. године. Каматна стопа је 5%. Колика је уплата за ове ренте, ако се зна да је она уплаћена 3 мјесеца прије исплате прве ренте? Рента прве серије је мања од посљедње ренте за 50%, а рента друге већа од ренте прве за 20%.

Дато: $R = 1{,}1R'$, $R = 140 + R'$, $i = 0{,}12$, $i_r = 0{,}06$

$\Rightarrow R' = 1.400$, $R = 1.540$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$U = 1.540 \cdot \left[2 + \frac{6(2-1)}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{6}}^{\mathbf{6}} + 1.400 \cdot IV_{\mathbf{6}}^{\mathbf{8}} \cdot II_{\mathbf{6}}^{\mathbf{6}}$$

Примјер 6 — Рјешење

Дато: $R'' = 6.000$, $R = 0{,}5R'' = 3.000$, $R' = 1{,}2R = 3.600$, $i = 0{,}05$

- 1. серија: тромјесечне исплате, 3 год. ($m = 4$, период исплата $<$ период кап.)
- 2. серија: полугодишње исплате, 4 год. ($m = 2$)
- 3. серија: једна исплата на крају 10. године

Формула:

$$U = R \cdot \left[4 + \frac{5 \cdot 3}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{5}}^{\mathbf{3}} + R' \cdot \left[2 + \frac{5}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{5}}^{\mathbf{4}} \cdot II_{\mathbf{5}}^{\mathbf{3}} + R'' \cdot II_{\mathbf{5}}^{\mathbf{10}}$$

Примјер 7 — Задатак

7. Инвеститор је током 5 година улагао по 300 KM свака 3 мјесеца (на крају сваког квартала) у штедни рачун код банке која обрачунава камату полугодишње. Номинална годишња каматна стопа износи 6% уз полугодишње капиталисање. На крају 5 година, инвеститор одлучује да подигне акумулирани износ кроз сљедеће сукцесивне исплате:

- Прве 3 године: исплате свака 2 мјесеца
- Наредне 2 године: исплате сваких 6 мјесеци
- Посљедње 3 године: једна исплата годишње

Банка наставља обрачунавати камату полугодишње, 6%. Поставити модел еквиваленције. Колико износи једна рента, ако је она као појединачна иста кроз све серије исплата?

Хвала на пажњи!

Питања?