

# Обвезнице

## Финансијска математика

---

Андреј Шева, асистент

2024/2025 • Финансијска математика

[andrej.seva@ef.unibl.org](mailto:andrej.seva@ef.unibl.org)

Консултације: уторком и четвртком 10-12h (кабинет 401) уз претходну најаву

**Обвезница** (енг. *bond*) је хартија од вриједности којом се емитент обавезује да ће власнику исплатити:

- **Номиналну вриједност** ( $NV$ ) на дан доспијећа
- **Купонску камату** ( $C$ ) у унапријед дефинисаним интервалима

**Основни елементи:**

- $NV$  — номинална вриједност
- $i$  — номинална (куп.) каматна стопа
- $i_r$  — релативна куп. стопа по периоду
- $C = i_r \cdot NV$  — износ купона
- $K$  — курс обвезнице (цијели број)
- $n$  — број купонских периода до доспијећа

**Напомене:**

- Купони су увијек **декурзивни**
- Курс = 97  $\Rightarrow$  дисконт 3%
- Курс = 106,66  $\Rightarrow$  премија 6,66%
- Номинала се враћа **одједном** на крају
- IRR = принос до доспијећа =  $r_e$

# Тржишна цијена обвезнице

Временска оса обвезнице:



Садашња вриједност свих новчаних токова (тржишна / прљава цијена):

$$TC = C \cdot IV_{pe}^n + NV \cdot II_{pe}^n$$

Тржишна цијена преко курса (када је куповина *шачно* на дан купона):

$$TC = \frac{K}{100} \cdot NV$$

## Чиста и прљава цијена

**Прљава (стварна) цијена** —  $TC$  — укључује накупљену камату за нецијели период:

$$TC = \frac{K}{100} \cdot NV + C \cdot \frac{d}{t}$$

гдје је:

- $d$  — број дана протеклих у текућем купонском периоду (накупљена камата)
- $t$  — укупан број дана у купонском периоду (181 или 360, зависно од конвенције)
- $C \cdot \frac{d}{t}$  — накупљена (припадајућа) камата

**Чиста цијена** (котацијска / *clean price*):

$$SC_{\text{чиста}} = TC - C \cdot \frac{d}{t}$$

### Напомена

На берзи обвезнице котирају по **чистој** цијени. Купац плаћа **прљаву** цијену (чиста + накупљена камата).

## Модел еквиваленције — принос до доспијећа

**Суштина:** тржишна (прљава) цијена изједначава се са садашњом вриједношћу свих будућих токова.

**Куповина тачно на дан купона** ( $n$  цијелих периода до доспијећа):

$$TC = C \cdot IV_{p_e}^n + NV \cdot II_{p_e}^n$$

**Куповина у нецијелом периоду** ( $n$  цијелих +  $\frac{d}{t}$  нецијелог периода):

$$TC = (C + C \cdot IV_{p_e}^n + NV \cdot II_{p_e}^n) \cdot II_{p_e}^{d/t}$$

или еквивалентно (кад је задњи купон посебно):

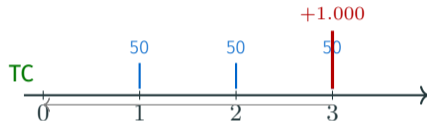
$$TC = (C (1 + IV_{p_e}^{n-1}) + NV \cdot II_{p_e}^n) \cdot II_{p_e}^{d/t}$$

Непознато  $p_e$  — принос до доспијећа — најчешће се тражи нумерички (итерацијом или из таблица).

**Задатак:** Инвеститор жели да оствари стварну стопу приноса до доспијећа 6%. Обвезница доспијева за **3 године**, исплаћује **годишње** купоне по **50 н.ј.**, а номинална вриједност је **1.000 н.ј.** Колико ће платити данас?

## Примјер 1 – рјешење

Подаци:  $p_e = 6\%$ ,  $C = 50$ ,  $NV = 1.000$ ,  $n = 3$



$$TC = 50 \cdot IV_6^3 + 1.000 \cdot II_6^3$$

$$TC = 973,27 \text{ н.ј.}$$

Обвезница котира **испод номинале** јер је купонска стопа (5%) нижа од захтијеване стопе приноса (6%).

**Задатак:** Обвезница котира **3 год. и 57 дана** прије доспијећа уз **дисконт 5%**. Полугодишњи купони, номинална каматна стопа 4%,  $NV = 1.000$  н.ј. Колику стопу зараде (принос до доспијећа) остварује купац?

## Примјер 2 – рјешење

Подаци:  $i = 0,04 \Rightarrow i_r = 0,02$ ,  $C = \frac{0,04}{2} \cdot 1.000 = 20$ ,  $K = 100 - 5 = 95$

Прљава (стварна) цијена — куповина 57 дана након задњег купона:

$$TC = \frac{95}{100} \cdot 1.000 + 20 \cdot \frac{124}{181} = 950 + 13,7 = 963,7$$

(у полугодишту је 181 дан; протекло 57 дана, преостало 124 дана до наредног купона)

Модел еквиваленције (7 купона преостало + наредни за  $\frac{124}{181}$  полугодишта):

$$963,7 = (20 + 20 \cdot IV_{\rho_e}^6 + 1.000 \cdot \underline{II}_{\rho_e}^6) \cdot \underline{II}_{\rho_e}^{124/181}$$

$$\Rightarrow \rho_e = \dots$$

**Задатак:** Обвезница номиналне вриједности 4.000 н.ј. котира **5 год. прије доспијећа** уз **премију од 6,66%**, камату стопу од 6% са полугодишњим купонима. Колику стопу приноса до доспијећа ће остварити инвеститор куповином ове обвезнице?

Подаци:  $i = 0,06 \Rightarrow i_r = 0,03$ ,  $C = 4.000 \cdot 0,03 = 120$ ,  $K = 100 + 6,66 = 106,66$ ,  $n = 10$

Тржишна цијена:  $TC = 4.000 \cdot \frac{106,66}{100} = 4.266,4$

Модел еквивалентности:

$$4.266,4 = 120 \cdot IV_{p_e}^{10} + 4.000 \cdot II_{p_e}^{10} \Rightarrow p_e = \dots$$

Купац плаћа изнад номинале  $\Rightarrow$  принос нији од купонске стопе.

**Задатак:** Обвезница котира по курсу **98,75**. уз номиналу од 1.000 КМ, амортизује се ануитетним купонима, уз номиналну каматна стопа 4% р.а. (d). Номинални износ доспијева за **4 године**.  
Поставити модел еквивалентности.

## Примјер 4 – рјешење

Подаци:  $K = 98,75$ ,  $i = 0,04$ ,  $C = 0,04 \cdot 1.000 = 40$

Тржишна цијена:  $TC = 1.000 \cdot \frac{98,75}{100} = 987,5$

Модел еквиваленције:

$$987,5 = 40 \cdot IV_{p_e}^4 + 1.000 \cdot II_{p_e}^4 \Rightarrow p_e = \dots$$

**Задатак:** Обвезница котира по курсу **99,01**. и номиналном вриједношћу од 1.000 н.ј. Купонска стопа је 5% годишње. Колика је стопа приноса до доспијећа **3 год. и 4 мјесеца** прије рока доспијећа?

## Примјер 5 – рјешење

**Подаци:**  $K = 99,01$ ,  $i = 0,05$ ,  $C = 50$ ,  $n = 3$  пуне год. +  $\frac{4}{12}$  нецијеле год.

Куповина је **8 мјесеци** након задњег купона (протекло  $\frac{8}{12}$ , преостало  $\frac{4}{12}$  до наредног купона).

**Прљава цијена:**

$$TC = 1.000 \cdot \frac{99,01}{100} + 50 \cdot \frac{8}{12} = 990,1 + 33,33 = 1.023,43$$

**Модел еквивалентности** (још 4 купона: за  $\frac{4}{12}$ , 1, 2, 3 год.):

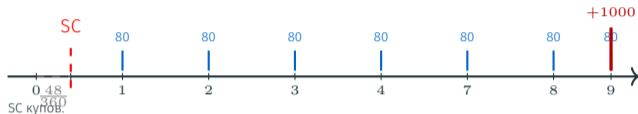
$$1.023,43 = [50 + 50 \cdot IV_{p_e}^3 + 1.000 \cdot II_{p_e}^3] \cdot II_{p_e}^{4/12}$$

$$1.023,43 = 50(1 + IV_{p_e}^3) \cdot II_{p_e}^{4/12} + 1.000 \cdot II_{p_e}^3 \cdot II_{p_e}^{4/12} \Rightarrow p_e = \dots$$

**Задатак:** Номинална вриједност обвезнице је 1.000 КМ. Купони износе 80 КМ и исплаћују се годишње. Обвезница доспијева за 8 година и 48 дана. Обвезница доспијева за 8 година и 48 дана. Колико треба платити данас уз ефективну каматну стопу од 9%?

## Примјер 6 – рјешење

Подаци:  $p_e = 9\%$ ,  $C = 80$ , протекло  $\frac{360-48}{360} = \frac{312}{360}$  годишта до наредног купона



Прљава цијена = чиста + припадајући дио купона:

$$SC_{\text{чиста}} + 80 \cdot \frac{360 - 48}{360} = [80 \cdot IV_9^8 + 80 + 1.000 \cdot II_9^8] \cdot II_9^{48/360}$$

$$SC_{\text{чиста}} = SC_{\text{прљава/ТС}} - 80 \cdot \frac{312}{360} = \dots$$

### Релација

$SC_{\text{чиста}} + \text{накупљена камата} = \text{за уплату данас}$

Тржишна цијена:

$$TC = C \cdot IV_{p_e}^n + NV \cdot II_{p_e}^n$$

Преко курса (тачно на дан купона):

$$TC = \frac{K}{100} \cdot NV$$

Прљава цијена (нецијели период):

$$TC = \frac{K}{100} \cdot NV + C \cdot \frac{d}{t}$$

Принос је виши од купонске стопе ако:

⇒ Курс < 100 (дисконт)

⇒ Обвезница јефтинија од номинале

Принос је нижи од купонске стопе ако:

⇒ Курс > 100 (премија)

⇒ Обвезница скупља од номинале

Ако је Курс = 100:

⇒  $p_e = i$  (принос = купонска стопа)

Хвала на пажњи!

Питања?