Amortizacija i konverzija zajma

Finansijska matematika

Andrej Ševa, ma, asistent

2025/2026 • Finansijska matematika

andrej.seva@ef.unibl.org

Konsultacije: utorkom i četvrtkom, 10–12h(kabinet401) uz prethodnu najavu

Amortizacija zajma u kontekstu finansijske matematike predstavlja kreiranje modela sukcesivnih isplata periodičnih anuiteta, a u svrhu izmirenja glavnice i pripadajuće kamate na osnovu dugoročnog dužničko-povjerilačkog aranžmana između banke i pravnog ili fizičkog subjekta.

Amortizaciju zajma, u ovom kontekstu, posmatramo preko modela:

- amortizacije zajma sa primarno datim otplatama
- amortizacije zajma sa primarno datim anuitetima

Amortizacija zajma sa primarno datim otplatama

Otplata predstavlja iznos kojim se vraća čitav ili dio zajma i u sebi ne sadrži kamatu I, dok anuitet (a) predstavlja otplatu uvećanu za dospjelu kamatu.

3 vrste modela amortizacije:

a) period plaćanja otplate je jednak periodu kapitalisanja
b) period plaćanja otplate je manji od perioda kapitalisanja
c) period plaćanja otplate je veći od perioda kapitalisanja

Ukoliko otplate unutar serije nisu jednake, mijenjaju se po nekom matematičkom zakonu, a dva slučaja koja izučavamo su:

a) otplate se mijenjaju po zakonitostima aritmetičke progresije
b) otplate se mijenjaju po zakonitostima geometrijske progresije

Amortizacija zajma sa primarno datim anuitetima

Anuitet je rata zajma i predstavlja zbir otplate i dospjele kamate u posmatranom trenutku.
U ovoj grupi modela svi anuiteti jedne serije su jednaki.

Primjeri

1. Zajam od 120.000 n.j. potrebno je amortizovati u toku 12 godina uz kamatnu stopu od 4% (d) i polugodišnje kapitalisanje. U toku prve 4 godine plaćaju se tromjesečni anuiteti koji iznose po 3.000 n.j. Nakon toga, u toku naredne 4 godine, anuiteti se konstantno povećavaju za 5% i plaćaju se polugodišnje, a u toku posljednje četiri godine anuiteti se plaćaju na kraju svake godine po ... n.j. Koliko iznosi anuitet treće serije ako je anuitet prve serije za 25% manji od prvog anuiteta druge serije?
2. Zajam od 200.000 n.j. potrebno je amortizovati u toku 13 godina uz kamatnu stopu od 2% (d) i polugodišnje kapitalisanje. U toku prvih 5 godina anuiteti se plaćaju na početku svakog polugodišta po 8.000 n.j; nadalje se plaćaju godišnji dekurzivni anuiteti po ... n.j, dok se posljednje 3 godine amortizacije plaćaju polugodišnji dekurzivni anuiteti od po 4.000 n.j. Potrebno je direktno naći elemente amortizacionog plana za 6. godinu amortizacije zajma.
3. Zajam od 200.000 n.j. potrebno je amortizovati uz kamatnu stopu od 3% (d) u toku prvih 5 godina i 4% (d) nadalje. Zajam se u toku prve 4 godine amortizuje jednakim tromjesečnim anuitetima, dok se u naredne 4 godine anuiteti plaćaju na kraju svakog dvomjesečja. Potrebno je izračunati ukupnu kamatu plaćenu u toku amortizacije ukoliko je prvi anuitet plaćen 15 mjeseci nakon odobravanja zajma. Kapitalisanje je kvartalno. Korisnik zajma zahtijeva da anuiteti budu jednaki uvijek bez obzira na promjenu uslova zajma.
4. Prikazati sljedeći model zajma:
   - Kamatna stopa za prve 3 godine je 3%, a zatim naredne 4 godine 5%, i nadalje 7% uz godišnje kapitalisanje.
   - U toku prvih 4 godine imamo dekurzivne anuitete svakih 6 mjeseci a.
   - Naredne 4 godine imamo godišnje anuitete od a’ koje se smanjuju za q.
   - Kamata sadržana u posljednjem anuitetu a’’ koji se plaća na kraju 10. godine jednaka je I. Anuitet treće serije je manji od poslednjeg anuiteta druge serije za 20%.

Primjeri

1. Zajam od 120.000 n.j. potrebno je amortizovati u toku 12 godina uz kamatnu stopu od 4% (d) i polugodišnje kapitalisanje. U toku prve 4 godine plaćaju se tromjesečni anuiteti koji iznose po 3.000 n.j. Nakon toga, u toku naredne 4 godine, anuiteti se konstantno povećavaju za 5% i plaćaju se polugodišnje, a u toku posljednje četiri godine anuiteti se plaćaju na kraju svake godine po ... n.j. Koliko iznosi anuitet treće serije ako je anuitet prve serije za 25% manji od prvog anuiteta druge serije.

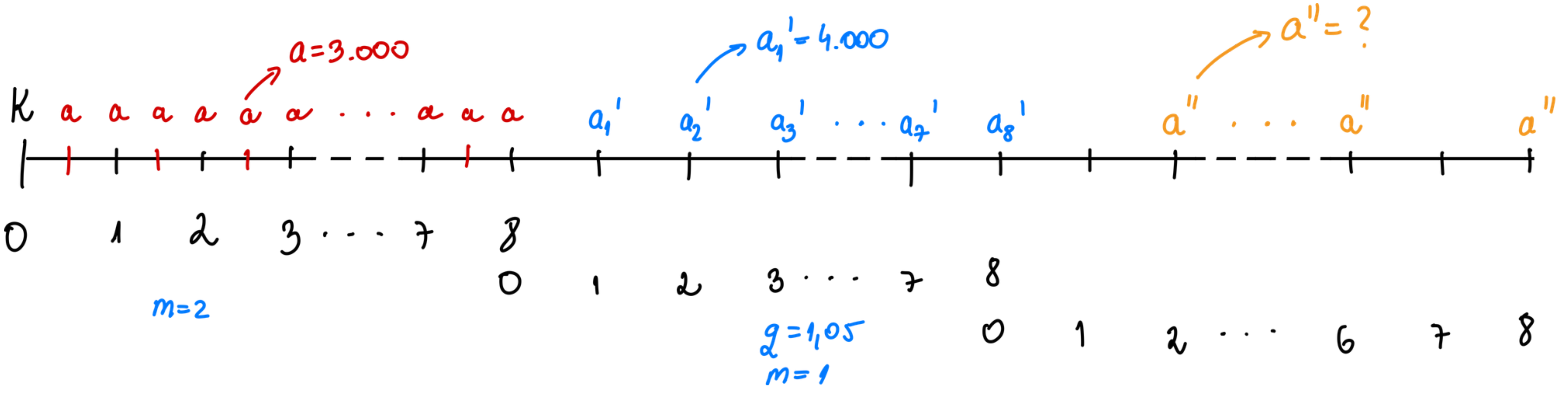
$K = 120.000$

$i = 0,04$

$i_r = 0,02 \rightarrow p_r = 2$

$a = 3.000$ $\quad a = 3.000$

$a = 0,75\, a_1' \Rightarrow a_1' = 4.000$



$$120.000 = 3.000 \cdot \left[2 + \frac{2(2-1)}{200}\right] I V_2^8 + 4.000\, \frac{1,02^8 - 1,05^8}{1,02^8(1,02-1,05)}\, II_2^8 + a''\, \frac{1,02^{2\cdot 4} - 1}{1,02^{2\cdot 4}(1,02^2 - 1)}\, II_2^{16}$$

$a'' = \ldots$

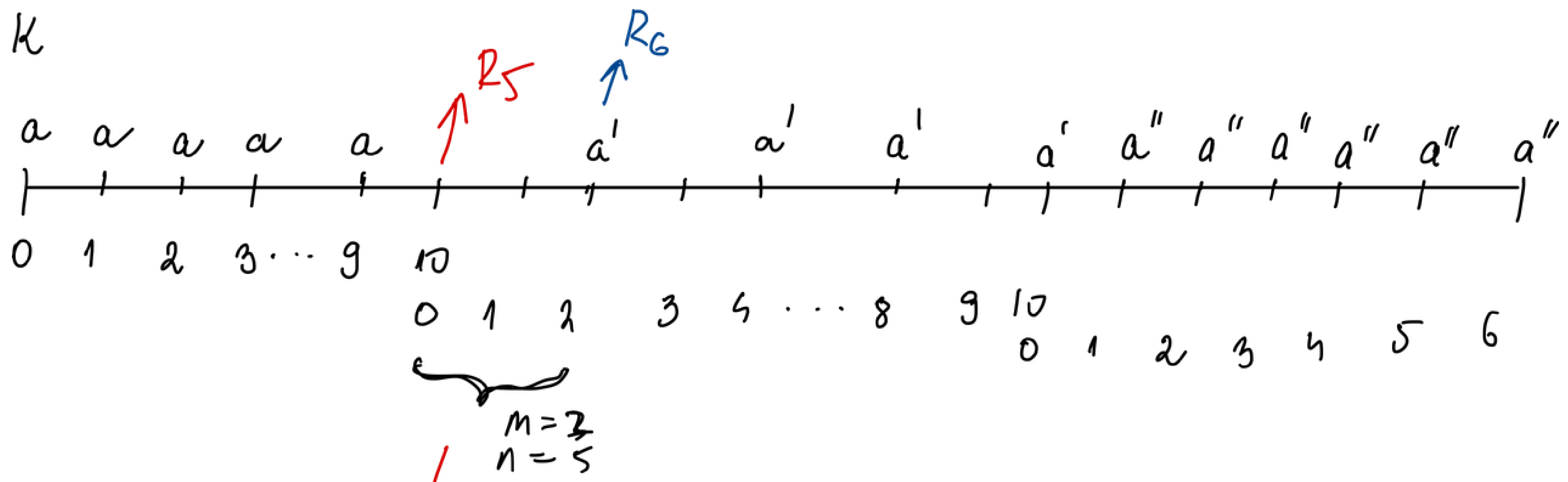
Primjeri

2. Zajam od 200.000 n.j. potrebno je amortizovati u toku 13 godina uz kamatnu stopu od 2% (d) i polugodišnje kapitalisanje. U toku prvih 5 godina anuiteti se plaćaju na početku svakog polugodišta po 8.000 n.j; nadalje se plaćaju godišnji dekurzivni anuiteti po ... n.j, dok se posljednje 3 godine amortizacije plaćaju polugodišnji dekurzivni anuiteti od po 4.000 n.j. Potrebno je direktno naći elemente amortizacionog plana za 6. godinu amortizacije zajma.

$a = 8.000 \qquad K = 200.000$

$a' = ? \qquad i = 0{,}02$

$a'' = 4.000 \qquad i_r = 0{,}01$



šesta godina

1° Postaviti model cjelokupnog zajma

$$200.000 = 8.000\left(1 + \mathrm{IV}_1^9\right) + a'\frac{1{,}01^{10}-1}{1{,}01^{10}(1{,}01^2-1)}\,\mathrm{II}_1^{10} + 4.000\,\mathrm{IV}_1^6\,\mathrm{II}_1^{20}$$

$$200.000 = 76.528 + a'\cdot 4{,}26 + 19.007{,}6$$

$$104.464{,}4 = a'\cdot 4{,}26 \Rightarrow a' = 24.522{,}16$$

2° naći ostatak duga na početku 6. godine (R_5)

$$R_5 = 24.522{,}16\,\frac{1{,}01^{10}-1}{1{,}01^{10}(1{,}01^2-1)} + 4.000\,\mathrm{IV}_1^6\,\mathrm{II}_1^{10}$$

$$R_5 = 115.550{,}67 + 20.977{,}9$$

$$R_5 = 136.528{,}57$$

3° $a = b + I$, izračunati I i naći otplatu

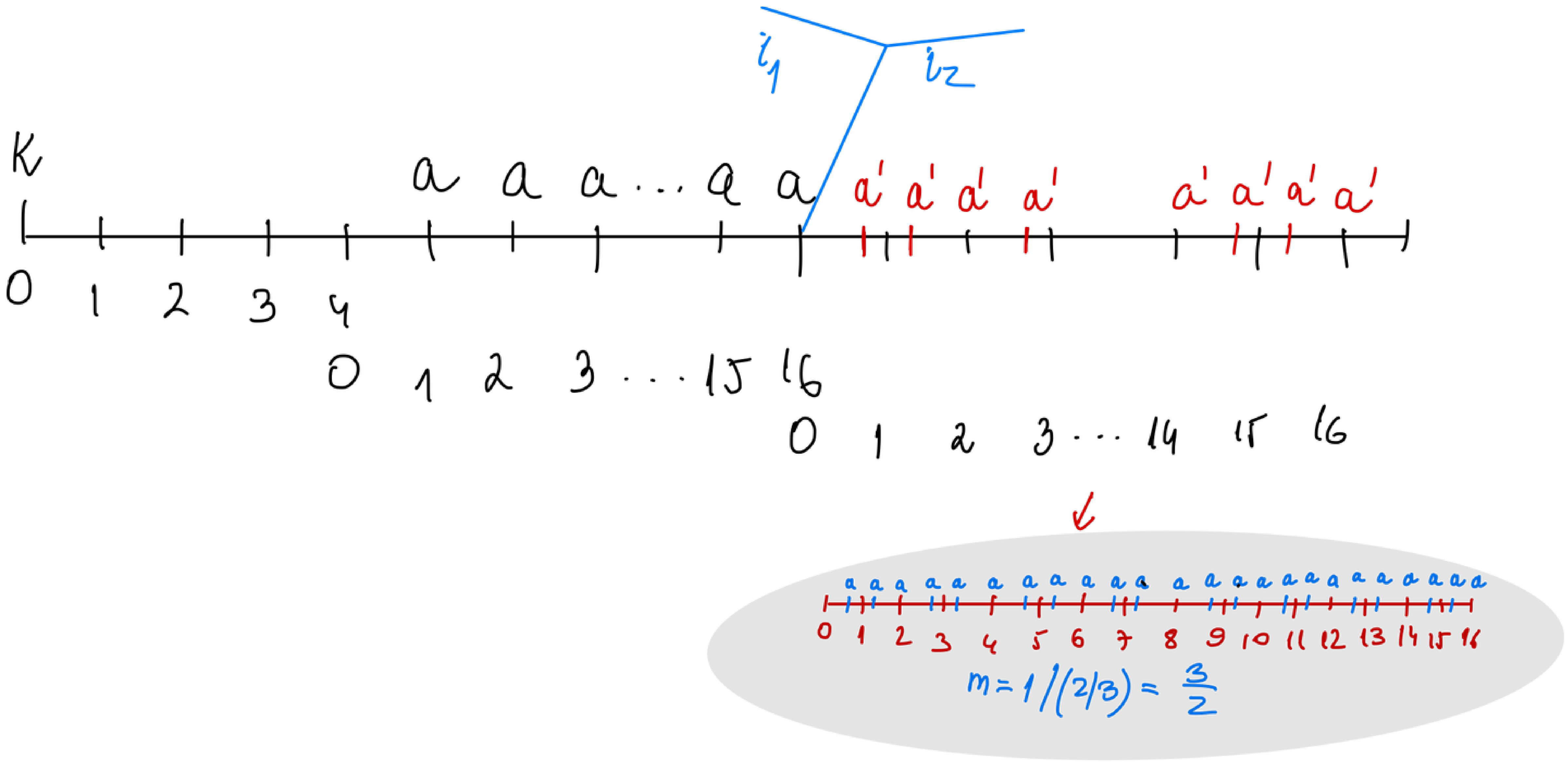
$$I_6 = 136.528\,(1{,}01^2-1)$$

$$I_6 = 2.744{,}21$$

$$a = 24.522{,}16 \Rightarrow b = 21.777{,}95$$

Primjeri

3. Zajam od 200.000 n.j. potrebno je amortizovati uz kamatnu stopu od 3% (d) u toku prvih 5 godina i 4% (d) nadalje. Zajam se u toku prve 4 godine amortizuje jednakim tromjesečnim anuitetima, dok se u naredne 4 godine anuiteti plaćaju na kraju svakog dvomjesečja. Potrebno je izračunati ukupnu kamatu plaćenu u toku amortizacije ukoliko je prvi anuitet plaćen 15 mjeseci nakon odobravanja zajma. Kapitalisanje je kvartalno. Korisnik zajma zahtijeva da anuiteti budu jednaki uvijek bez obzira na promjenu uslova zajma.



$m = 1/(2/3) = \frac{3}{2}$

$i_1 = 0{,}03$

$i_{r_1} = 0{,}0075$

$i_2 = 0{,}04$

$i_{r_2} = 0{,}01$

$K = 200.000$

$a = a'$

Primjeri

3. Zajam od 200.000 n.j. potrebno je amortizovati uz kamatnu stopu od 3% (d) u toku prvih 5 godina i 4% (d) nadalje. Zajam se u toku prve 4 godine amortizuje jednakim tromjesečnim anuitetima, dok se u naredne 4 godine anuiteti plaćaju na kraju svakog dvomjesečja. Potrebno je izračunati ukupnu kamatu plaćenu u toku amortizacije ukoliko je prvi anuitet plaćen 15 mjeseci nakon odobravanja zajma. Kapitalisanje je kvartalno. Korisnik zajma zahtijeva da anuiteti budu jednaki uvijek bez obzira na promjenu uslova zajma.

$$200.000 = a \cdot \frac{(1{,}0075)^{16}-1}{(1{,}0075)^{16}(1{,}0075-1)} \cdot \frac{1}{(1{,}0075)^{4}} + a\left[\frac{3}{2} + \frac{1 \cdot \left(\frac{3}{2}-1\right)}{200}\right] IV_{1}^{16} \cdot \left(\frac{1}{1{,}0075}\right)^{20}$$

$$200.000 = a \cdot 14{,}58 + a \cdot 19{,}04$$

$$200.000 = 33{,}62 \cdot a$$

$$a = 5.948{,}84 \qquad n(a) = 24 + 16 = 40$$

$$40 \cdot a = 200.000 + I$$

$$40 \cdot 5.948{,}84 = 200.000 + I$$

$$237.953{,}6 = 200.000 + I$$

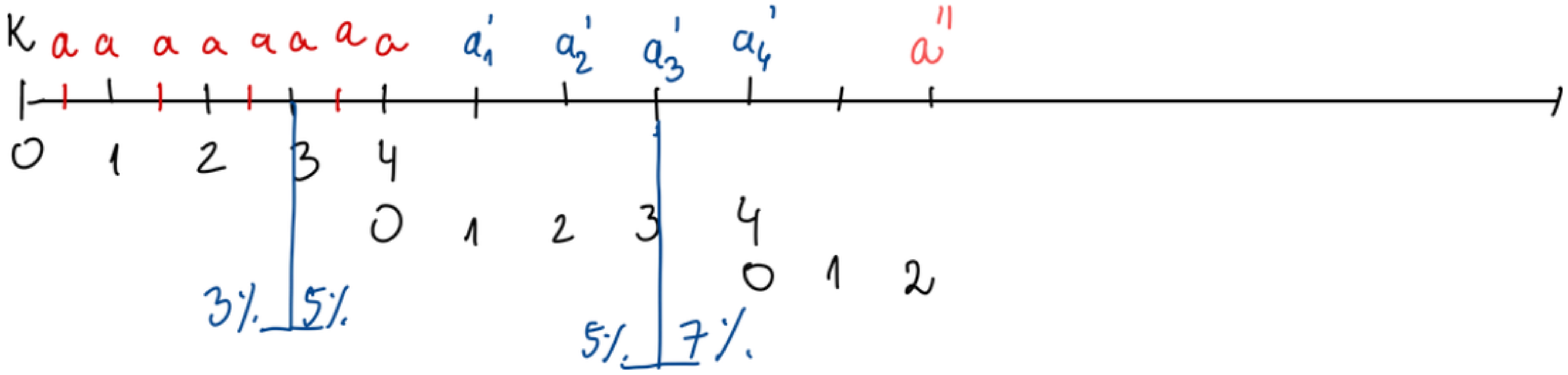
$$I = 37.953{,}6 \longrightarrow \text{UKUPNA PLAĆENA KAMATA}$$

Primjeri

4.Prikazati sljedeći model zajma:

- Kamatna stopa za prve 3 godine je 3%, a zatim naredne 4 godine 5%, i nadalje 7% uz godišnje kapitalisanje.
- U toku prvih 4 godine imamo dekurzivne anuitete svakih 6 mjeseci **a** .
- Naredne 4 godine imamo godišnje anuitete od **a ’** koje se smanjuju za **q** .
- Kamata sadržana u posljednjem anuitetu a’’ koji se plaća na kraju 10. godine jednaka je **I** . Anuitet treće serije je manji od poslednjeg anuiteta druge serije za 20%.

$$a_4' = a_1 \cdot q^3 \qquad a'' = a_4 \cdot 0{,}8 = a_1 \cdot q^3 \cdot 0{,}8$$



Konverzija zajma

Predstavlja promjenu uslova zajma u toku same konverzije zajma i podrazumijeva izmjenu jednog ili više elemenata ugovora o zajmu. Neke od najčešćih vrsta promjena mogu biti:

1. prijevremena otplata cjelokupnog iznosa zajma;
2. prijevremena otplata dijela zajma;
3. promjena visine kamatne stope;
4. skraćenje ili produženje perioda otplate zajma;
5. promjena modela otplate zajma, itd.

Konverzija zajma

Koraci u rješavanju tipskih problema konverzije zajma

1. Definisati sve elemente amortizacije zajma po inicijalnim uslovima, odnosno postaviti model kao da nikada nije došlo do promjene uslova.
2. Izračunati ostatak duga u trenutku konverzije (Rx)
3. Primijeniti nove uslove amortizacije zajma i izračunati nove elemente amortizacije zajma, odnosno isto naći Rx, samo po novim uslovima.

Primjeri

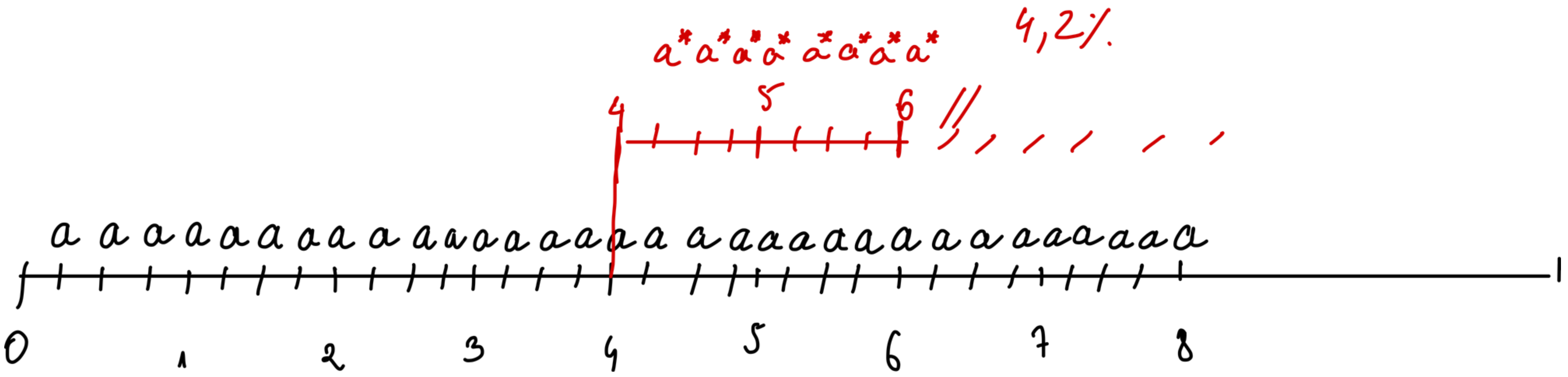
1.Zajam od 98.000n.j. amortizuje se u toku 8 godina uz kamatnu stopu od 4% p.a. (d) i dvomjesečne dekurzivne anuitete. Na dan plaćanja 18. anuiteta odučeno je da se period otplate zajma smanji za 2 godine, a kamatna stopa poveća na 4,2% p.a. (d). Koliko je iznos novog anuiteta? Definisati sve elemente modela.

2.Zajam od 300.000 n.j. se amortizuje na sljedeći način: u toku prve 4 godine polugodišnjim anuitetima koji se povećavaju za 2%, tokom naredne 3 godine polugodišnjim anuitetima koji iznose 1.000 n.j, a posljednji anuitet od 10.000 n.j. se plaća na kraju 8. godine. Kamatna stopa je 10% p.a. (d) uz polugodišnje kapitalisanje. 5 godina nakon početka amortizacije odlučeno je da se kamatna stopa poveća na 12% p.a. (d). Definisati sve elemente modela.

3.Zajam od 100.000 n.j. potrebno je amortizovati u toku 15 godina uz kamatnu stopu 3% p.a. (d) i polugodišnje kapitalisanje. U toku prvih 14 godina plaćaće se dvomjesečni anticipativni anuiteti, dok će posljednji anuitet biti plaćen na kraju 15. godine amortizacije. Nakon 7 godina od početka amortizacije odlučeno je da se kamatna stopa smanji na 2% p.a. (d) i da se preostalo vrijeme amortizacije zajma skrati za 2 godine. Potrebno je izračunati vrijednost anuiteta nakon konverzije ukoliko je posljednji anuitet za 300% veći od anuiteta prve serije.

Primjeri

1. Zajam od 98.000 n.j. amortizuje se u toku 8 godina uz kamatnu stopu od 4% p.a. (d) i tromjesečne dekurzivne anuitete. Na dan plaćanja 16. anuiteta odučeno je da se period otplate zajma smanji za 2 godine, a kamatna stopa poveća na 4,2% p.a. (d). Koliki je iznos novog anuiteta? Definisati sve elemente modela.



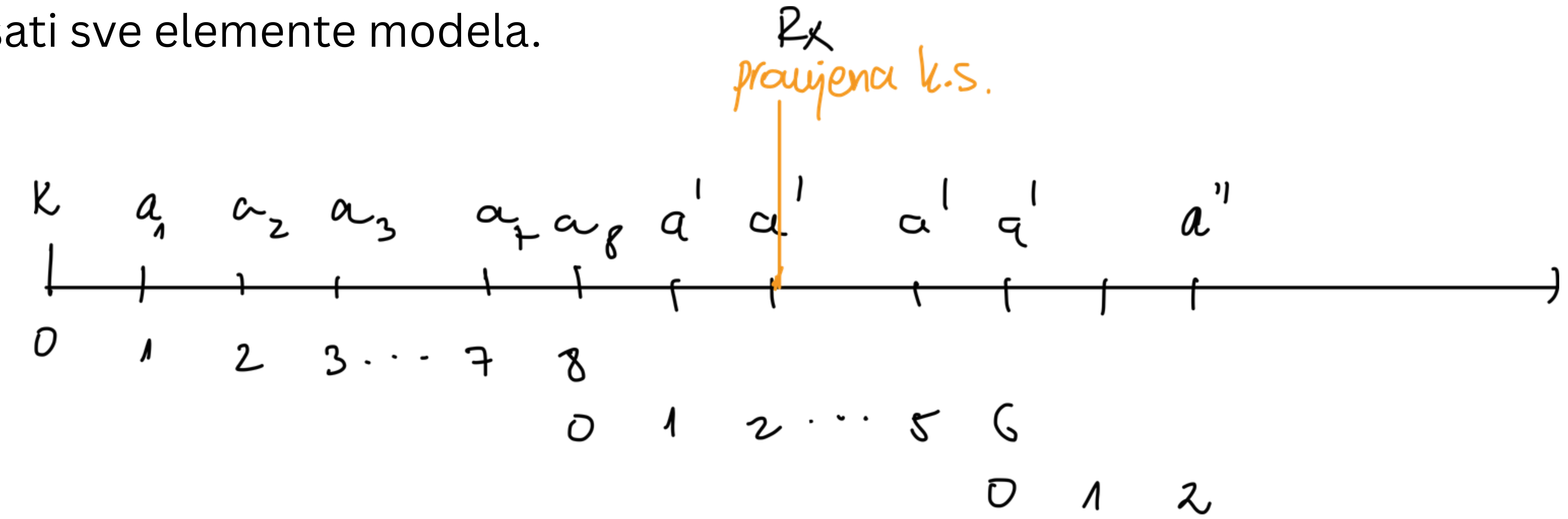
$$98.000 = a\left[4 + \frac{4(4-1)}{200}\right] IV_4^8 \Rightarrow a = \ldots$$

$$R_x = a\left[4 + \frac{4(4-1)}{200}\right] IV_4^4 \Rightarrow R_x = \ldots$$

$$R_x = a^*\left[4 + \frac{4{,}2(4-1)}{200}\right] IV_{4,2}^2 \Rightarrow a^* = \ldots$$

Primjeri

2. Zajam od 300.000 se amortizuje na sljedeći način: u toku prve 4 godine polugodišnjim anuitetima koji se povećavaju za 2%, tokom naredne 3 godine polugodišnjim anuitetima koji iznose 1.000, a posljednji anuitet od 10.000 se plaća na kraju 8. godine. Kamatna stopa je 10% p.a. (d) uz polugodišnje kapitalisanje. 5 godina nakon početka amortizacije odlučeno je da se kamatna stopa poveća na 12% p.a. (d). Definisati sve elemente modela.



1° $$300.000 = a_1 \cdot \frac{1,05^8 - 1,02^8}{1,05^8(1,05-1,02)} + 1.000\, IV_5^6\, II_5^8 + 10.000\, II_5^{16} \Rightarrow a_1 = \dots$$

2° $$R_x = 1.000\, IV_5^4 + 10.000\, II_5^6 \Rightarrow R_x = \dots$$

3° $$R_x = a'^{*}\, IV_6^4 + a^{*''}\, II_6^6$$