Сукцесивне исплате — ренте

IV таблице • Декурзивне и антиципативне исплате • Вјечите ренте

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 10 и 11

andrej.seva@ef.unibl.org

Консултације: уторком и четвртком 10–12h (кабинет 401) уз претходну најаву

Употреба IV финансијских таблица

Једнаке сукцесивне исплате, углавном распоређене у унапријед дефинисаним једнаким временским интервалима

3 варијанте:

1. Период капиталисања = Период исплата
2. Период исплата < Период капиталисања (чешће исплате од капиталисања)
3. Период исплата > Период капиталисања (чешће капиталисање од исплата)

+ Вјечите ренте

Двије врсте исплата:

- Декурзивне — исплата на крају периода
- Антиципативне — исплата на почетку периода

Период капиталисања = Период исплата

Декурзивне исплате

Период капиталисања = Период исплата

Формуле:

$$K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = R \cdot IV_p^n$$

гдје je $r = 1 + \frac{p}{100}$ (каматни фактор), $v = \frac{1}{r}$ (дисконтни фактор)

Декурзивне исплате — извођење обрасца

$$K = R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + R \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots + R \cdot \frac{1}{r^n} = R \cdot (v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n)$$

Издвојимо суму геометријског низа $S = v + v^2 + \ldots + v^n$:

$$\begin{aligned} S \cdot v &= v^2 + v^3 + \ldots + v^{n+1} \\ S - S \cdot v &= v - v^{n+1} \\ S(1 - v) &= v(1 - v^n) \end{aligned}$$

$$S = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{\frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

Вратимо у првобитни образац:

$$\boxed{K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)} = R \cdot IV_p^n}$$

Антиципативне исплате

Период капиталисања = Период исплата

Формуле:

$$K = R \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r^n(r-1)} = R \cdot (1 + IV_p^{n-1})$$

1. Полугодишња рента од 3.000 н.ј. прима се 4 године. Примање ренте почиње 6 мјесеци послије уплате. Камата се обрачунава полугодишње на основу годишње каматне стопе 8% (d). Колика је уплата?

2. Колико би новчаних јединица требало издвојити у неки фонд за помоћ радницима за коришћење плаћеног одсуства у току 6 година, уз годишње укамаћење по стопи 7% (d), ако би годишња помоћ била 5.000 н.ј. и ако би исплата почела одмах?

3. Колико би новчаних јединица требало уплатити за 6 годишњих исплата по 4.200 н.ј. ако би се прва сума примила 4 године након уплате и ако се камата обрачунава годишње по стопи 5% (d)? Претпоставити да су исплате: а) декурзивне и б) антиципативне.

4. Уговором о стипендирању, фонд се обавезао да ће стипендисти исплаћивати мјесечно, и то у току 4 године по 200 н.ј. Поред тога, фонд ће исплатити на име награде 1.000 н.ј. ако стипендиста заврши студије за 4 године. Исплата треба да почне: а) један мјесец од дана потписивања уговора и б) на дан потписивања уговора. Годишња каматна стопа, уз мјесечни обрачун, 12%.

Примјер 1 — Рјешење

Дато: $R = 3.000$, $n = 4$ год. $\times 2 = 8$ полугодишта, $i = 0{,}08$, $i_r = 0{,}04$

Декурзивне исплате (прва исплата 6 мјесеци послије уплате):

Рјешење:

$$U = 3.000 \cdot IV_4^8$$

Објашњење:

- IV_4^8 — дисконтовање свих рента на тренутак уплате (IV таблице)
- Период капиталисања = Период исплата = полугодиште
- $p/m = 8/2 = 4$

Примјер 2 — Рјешење (антиципативно)

Дато: $R = 5.000$, $n = 6$ година, $i = 0{,}07$

Исплата почиње одмах $\Rightarrow$ антиципативне ренте

Рјешење:

$$U = R \cdot (1 + IV_7^{6-1}) = 5.000 \cdot (1 + IV_7^5)$$

Формула за антиципативне ренте: $K = R \cdot (1 + IV_p^{n-1})$

Примјер 3 — Рјешење (одгођена рента)

Дато: $R = 4.200$, 6 годишњих исплата, прва исплата 4 године након уплате, $i = 0{,}05$

а) Декурзивне:

$$U = 4.200 \cdot IV_5^6 \cdot II_5^3$$

б) Антиципативне:

$$U = 4.200 \cdot (1 + IV_5^{6-1}) \cdot II_5^4$$

Објашњење:

- IV_5^6 дисконтује ренте на почетак серије исплата
- II_5^3 (односно II_5^4) дисконтује ту вриједност назад на тренутак уплате

Примјер 4 — Рјешење (стипендирање)

Дато: $R = 200$, $R' = 1.000$, $n = 4$ године $\times 12 = 48$ мјесеци, $i = 0{,}12$, $i_r = 0{,}01$

а) Декурзивно (исплата почиње 1 мјесец од потписивања):

$$U = 200 \cdot IV_1^{48} + 1.000 \cdot II_1^{48}$$

б) Антиципативно (исплата почиње на дан потписивања):

$$U = 200 \cdot (1 + IV_1^{47}) + 1.000 \cdot II_1^{48}$$

Објашњење:

- Награда од 1.000 н.ј. се исплаћује на крају 48. мјесеца — увијек се дисконтује са II_1^{48}
- Разлика је само у формули за мјесечне ренте

Период исплата $<$ Период капитализања

Декурзивне исплате — чешће исплате од капиталисања

Период исплата $<$ Период капиталисања

Метод конформне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r_c^{mn} - 1}{r^{mn}(r_c - 1)}$$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p(m-1)}{200}\right] \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

гдје је:

- m — број исплата унутар једног периода капиталисања
- n — број периода капиталисања
- r_c — конформни каматни фактор

Антиципативне исплате — чешће исплате од капиталисања

Период исплата $<$ Период капиталисања

Метод конформне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r_c \cdot (r_c^{mn} - 1)}{r^{mn}(r_c - 1)}$$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p(m+1)}{200}\right] \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

Разлика од декурзивног:

- $(m-1)$ постаје $(m+1)$ у бројиоцу

Период исплата $>$ Период капиталисања

Декурзивне исплате — чешће капиталисање од исплата

Период исплата $>$ Период капиталисања

Метод дисконтовања сваке ренте појединачно / ефективне каматне стопе:

$$K = R \cdot \frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r^m - 1)}$$

гдје је:

- m — број периода капиталисања унутар једног периода исплата
- n — укупан број исплата (рента)

Антиципативне исплате — чешће капиталисање од исплата

Период исплата $>$ Период капиталисања

$$K = R \cdot \frac{r^m \cdot (r^{mn} - 1)}{r^{mn}(r^m - 1)}$$

5. Колико особа А треба да уплати данас да би осигурала себи једнаку кварталну постнумерандо ренту која ће се исплаћивати 3 године и након тога једнаку декурзивну полугодишњу ренту још 4 године. Рента прве серије је већа од ренте друге серије за 10%, односно за 140 н.ј. Обрачун камате је полугодишњи по каматној стопи од 12% p.a. (d), а прва рента друге серије се исплаћује 6 мјесеци након посљедње ренте прве серије.

6. Рента је исплаћивана у току 10 година на сљедећи начин: прве 3 године на крају сваког тромјесечја по ... н.ј, у току наредне 4 на крају сваког полугодишта, а посљедња рента у износу од 6.000 н.ј. је исплаћена на крају 10. године. Каматна стопа је 5%. Колика је уплата за ове ренте, ако се зна да је она уплаћена 3 мјесеца прије исплате прве ренте? Рента прве серије је мања од посљедње ренте за 50%, а рента друге већа од ренте прве за 20%.

Примјер 5 — Рјешење

Дато: $R = 1{,}1R'$, $R = 140 + R'$, $i = 0{,}12$, $i_r = 0{,}06$

$\Rightarrow R' = 1.400$, $R = 1.540$

Метод комбинације простог и сложеног каматног рачуна:

$$U = 1.540 \cdot \left[2 + \frac{6(2-1)}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{6}}^{\mathbf{6}} + 1.400 \cdot IV_{\mathbf{6}}^{\mathbf{8}} \cdot II_{\mathbf{6}}^{\mathbf{6}}$$

Примјер 6 — Рјешење

Дато: $R'' = 6.000$, $R = 0{,}5R'' = 3.000$, $R' = 1{,}2R = 3.600$, $i = 0{,}05$

- 1. серија: тромјесечне исплате, 3 год. ($m = 4$, период исплата $<$ период кап.)
- 2. серија: полугодишње исплате, 4 год. ($m = 2$)
- 3. серија: једна исплата на крају 10. године

Формула:

$$U = R \cdot \left[4 + \frac{5 \cdot 3}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{5}}^{\mathbf{3}} + R' \cdot \left[2 + \frac{5}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{5}}^{\mathbf{4}} \cdot II_{\mathbf{5}}^{\mathbf{3}} + R'' \cdot II_{\mathbf{5}}^{\mathbf{10}}$$

Примјер 7 — Задатак

7. Инвеститор је током 5 година улагао по 300 KM свака 3 мјесеца (на крају сваког квартала) у штедни рачун код банке која обрачунава камату полугодишње. Номинална годишња каматна стопа износи 6% уз полугодишње капиталисање. На крају 5 година, инвеститор одлучује да подигне акумулирани износ кроз сљедеће сукцесивне исплате:

- Прве 3 године: исплате свака 2 мјесеца
- Наредне 2 године: исплате сваких 6 мјесеци
- Посљедње 3 године: једна исплата годишње

Банка наставља обрачунавати камату полугодишње, 6%. Поставити модел еквиваленције. Колико износи једна рента, ако је она као појединачна иста кроз све серије исплата?

Примјер 7 — Рјешење

Дато: $U = 300$, $i = 0{,}06$, $i_r = 0{,}03$, $r_e = (1{,}03)^2 = 1{,}0609$

$R = R' = R''$ (једнаке ренте свих серија)

Фаза улагања: декурзивно, период улагања $<$ период капиталисања

$$K = 300 \cdot \left(2 + \frac{3}{200}\right) \cdot (III_3^9 + 1)$$

Фаза исплата:

$$K = R \cdot \left(3 + \frac{3 \cdot 2}{200}\right) \cdot IV_3^6 + R \cdot IV_3^4 \cdot II_3^6 + R \cdot IV_{6,09}^3 \cdot II_3^{10}$$

Из еквиваленције $K = K$:

$$R = 300 \cdot \frac{\left(2 + \frac{3}{200}\right)\left(III_3^9 + 1\right)}{\left(3 + \frac{6}{200}\right) IV_3^6 + IV_3^4 \cdot II_3^6 + IV_{6,09}^3 \cdot II_3^{10}}$$

Аритметичка и геометријска прогресија

Период исплата = Период капиталисања

Ренте се мијењају за константан износ d сваки период.

Декурзивно:

$$K = R_1 \cdot IV_p^n \pm \frac{100d}{p} \cdot \left[IV_p^n - n \cdot II_p^n\right]$$

Антиципативно:

$$K = R_1 \cdot (1 + IV_p^{n-1}) \pm \frac{100d}{p} \cdot \left[(1 + IV_p^{n-1}) - n \cdot II_p^{n-1}\right]$$

$+$ ако се ренте повећавају, $-$ ако се смањују

Период исплата = Период капиталисања

Ренте се мијењају за константан проценат q сваки период.

Декурзивно:

$$K = R_1 \cdot \frac{r^n - q^n}{r^n(r-q)}$$

Ако je $r = q$: $\quad K = R_1 \cdot n \cdot II_p^n$

Антиципативно:

$$K = R_1 \cdot \frac{r(r^n - q^n)}{r^n(r-q)}$$

Ако je $r = q$: $\quad K = R_1 \cdot n$

Ренте и улози — комбиновани задаци

1. Уговорено је да се уплаћује годишње декурзивно у току 10 година по 10.000 н.ј. Формирана сума треба да послужи за једнаке тромјесечне декурзивне ренте чије би исплаћивање почело 3 мјесеца након уплате посљедњег улога и потрајало 5 година. Првих 5 улога положено је према уговору, док је посљедњих 5 улога положено на дан рока уплате 10. улога у износу којим су ликвидиране све обавезе. Камата се обрачунава годишње по стопи 8% (d). Колика је рента?

2. Рента се исплаћује у току 15 година: у току првих 5 година на почетку сваког полугодишта по 6.000 н.ј; у току наредних 6 година на крају сваког мјесеца по ... н.ј; у току посљедње 4 године на крају сваког тромјесечја, с тим да се рента константно повећава за 2,8%. Каматна стопа за првих 7 година и 7 мјесеци је 2% (d), а надаље 2,4% (d) уз тромјесечно капиталисање. Колика је уплата ако је рента прве серије већа од ренте друге серије за 700%, а рента друге серије мања од прве ренте треће серије за 50%?

3. Улагано је у току 5 година на почетку сваког мјесеца по ... н.ј. На бази акумулираних средстава исплаћивана је рента у току 10 година: у току прве 4 године полугодишње, с тим да се рента константно смањује за 0,4%; у току наредних 5 година годишње по ... н.ј.; а посљедња рента је исплаћена на крају десете године и износи 6.000 н.ј. Каматна стопа 4% (d) уз полугодишње капиталисање. Колики је улог ако је посљедња рента већа од прве ренте прве серије за 140%, а посљедња рента прве серије мања од ренте друге серије за 40%?

4. Прије 10 година почело се са уплатама на рачун у банци: прве 3 године крајем свака четири мјесеца по 200 н.ј, наредне 4 године крајем полугодишта по 340 н.ј. Посљедња уплата, почетком десете године износила је 3.992,44 н.ј. Исплата почиње одмах по завршетку посљедње године улагања и врши се у двије серије. Прва серија исплата је годишња (10 год.). Након тога креће вјечна декурзивна четворомјесечна исплата. Рента вјечне ренте мања за 30% од ренте прве серије. Капиталисање четворомјесечно, каматна стопа 9% (d).

5. Уплаћивано је у току 5 година на крају сваког тромјесечја по ... н.ј. Потом је у току наредне 3 године уплаћивано на крају сваког полугодишта по 12.320,00 н.ј. На бази акумулираних средстава исплаћиване су декурзивне полугодишње ренте које се константно повећавају за 5% у току 7 година. Прва исплата почиње једно полугодиште послије посљедње уплате. Колико износи прва рента, ако је уплата друге серије већа од уплате прве серије за 40% и ако је каматна стопа за првих 10 година 13%, а за наредни период 14% p.a. (d) уз полугодишњи обрачун камате?

Задатак 1 — Рјешење

Дато: $U = 10.000$, $i = 0{,}08$, 5 улога редовно + 5 улога одједном

$U^* = 5U = 10.000 \cdot 5 = 50.000$

Еквиваленција (пролонгација улога = дисконтовање ренті):

$$10.000 \cdot (1 + III_{\mathbf{8}}^{\mathbf{5-1}}) \cdot I_{\mathbf{8}}^{\mathbf{5}} + 50.000 = R \cdot \left[4 + \frac{8(4-1)}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{8}}^{\mathbf{5}}$$

Рјешење за R:

$$R = \frac{10.000 \cdot (1 + III_{\mathbf{8}}^{\mathbf{4}}) \cdot I_{\mathbf{8}}^{\mathbf{5}} + 50.000}{\left[4 + \frac{\mathbf{8 \cdot 3}}{\mathbf{200}}\right] \cdot IV_{\mathbf{8}}^{\mathbf{5}}}$$

Напомена: $\frac{1}{IV_p^n} = V_p^n$ *(реципрочна вриједност IV таблица)*

Задатак 2 — Рјешење

Дато: $R = 6.000,\ R = 8R' \Rightarrow R' = 750,\ R' = 0{,}5R_1'' \Rightarrow R_1'' = 1.500$

$i_1 = 0{,}02,\ i_{1r} = 0{,}005;\ i_2 = 0{,}024,\ i_{2r} = 0{,}006;\ q = 1{,}028$

Еквивалентна каматна стопа: $r_e = (1{,}005)^2$, тј. $n(R) = 10$ полугодишта

Формула:

$$K = R \cdot \frac{1{,}005^{\mathbf{2}}(1{,}005^{\mathbf{2\cdot 10}} - 1)}{1{,}005^{\mathbf{2\cdot 10}}(1{,}005^{\mathbf{2}} - 1)} + R' \cdot \left[3 + \frac{0{,}5(3-1)}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{0,5}}^{\mathbf{10}} \cdot II_{\mathbf{0,5}}^{\mathbf{20}}$$

$$+ R' \cdot II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{1/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{30}} + R' \cdot II_{\mathbf{0.6}}^{\mathbf{1/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{1/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{30}} + R' \cdot II_{\mathbf{0.6}}^{\mathbf{2/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{30}} + R' \cdot \left[3 + \frac{0{,}5(3-1)}{200}\right] \cdot IV_{\mathbf{0,6}}^{\mathbf{13}} II_{\mathbf{0.6}}^{\mathbf{2/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{1/3}} II_{\mathbf{0.5}}^{\mathbf{30}}$$

$$+ R_1'' \cdot \frac{1{,}006^{\mathbf{16}} - 1{,}028^{\mathbf{16}}}{1{,}006^{\mathbf{16}}(1{,}006 - 1{,}028)} \cdot II_{\mathbf{0,6}}^{\mathbf{13\frac{2}{3}}} \cdot II_{\mathbf{0,5}}^{\mathbf{30\frac{1}{3}}}$$

Задатак 3 — Рјешење

Дато: $R'' = 6.000,\ R'' = 2{,}4R_1 \Rightarrow R_1 = 2.500,\ R_8 = 0{,}6R' \Rightarrow R' = 4.051{,}39$

$q = 0{,}996,\ R_8 = 2.500 \cdot (0{,}996)^7 = 2.430{,}83$

$i = 0{,}04,\ i_r = 0{,}02,\ r_e = (1{,}02)^2 = 1{,}0404,\ p_e = 4{,}04$

Еквиваленција (улози = ренте):

$$U \cdot \left[6 + \frac{2(6+1)}{200}\right] \cdot (1 + III_{\mathbf{2}}^{\mathbf{10-1}}) = 2.500 \cdot \frac{(1{,}02)^{\mathbf{8}} - (0{,}996)^{\mathbf{8}}}{(1{,}02)^{\mathbf{8}}(1{,}02 - 0{,}996)} + 4.051{,}39 \cdot IV_{\mathbf{4,04}}^{\mathbf{5}} \cdot II_{\mathbf{2}}^{\mathbf{18}} + R'' \cdot II_{\mathbf{2}}^{\mathbf{30}}$$

Хвала на пажњи!

Питања?